



TITLE:

# ストークス流中の円板に働く力(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

橋本, 英典; 宮寄, 武

---

CITATION:

橋本, 英典 ...[et al]. ストークス流中の円板に働く力(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1984, 510: 132-154

ISSUE DATE:

1984-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98309>

RIGHT:

# ストークス流中の円板に働く力

東大理学部 橋本 英典

(Hidenori HASIMOTO)

国立公害研 宮崎 武

(Takeshi MIYAZAKI)

いとぐち

ストークスの流れの中におかれた円板に働く力やモーメントは、一様な流れについては古くから知られているが、<sup>1,2)</sup>微小物体をあらわすストークスレットによる流れに対しては知られていない。<sup>3,4)</sup>Brennerは無限に広がった任意のストークス流の中におかれた球に働く力やモーメントをその流れの球心における速度<sup>4,5)</sup>から導くFaxénの公式を楕円体に拡張したが、その形は複雑である。

第1章では偏長回転楕円体のばあいに限れば、すべてが簡単な公式で表わされることを示す。偏平なばあいはその解析延長であり、円板に対する公式もその極限として導かれる。<sup>6)</sup>

第2章では任意のストークスレットが円板のまわりにひきおこす流れを解析し、その一つの結果として円板におよぼす力やモーメントが第1章の公式を用いて得られるものと合致することを示す。<sup>7)</sup>

# 第1章 Faxén の公式の回転楕円体への拡張<sup>6)</sup>

## 第1節 いとぐち

1904年 Faxén<sup>5)</sup> は原点を中心とする半径  $a$  の球内で正則な定常ストークス流 (速度  $u(x)$ , 圧力  $p(x)$ ) の中に原点を中心とする半径  $a$  の球をおいたとき、球に働く力  $F$  および原点まわりのトルク  $T$  が、与えられた  $u$ , 圧力勾配  $\mu q = \text{grad } p$ , 渦度  $\omega = \text{rot } u$  の原点における値をもちいて

$$F = 6\pi\mu a (u + \frac{1}{6} a^2 q)_0, \quad T = 4\pi\mu a^3 \omega_0 \quad (1.1)$$

と表わすことができると (Faxén's law) を示した。この公式はその後 Pèrès,<sup>8)</sup> Brenner<sup>3)</sup> によって半長軸  $a_j$ , ( $j=1, 2, 3$ ) の楕円体のはあいに拡張され

$$F = \frac{1}{3V} \int \mu K u \wedge ds, \quad T = \frac{1}{V} \int \mu Q \cdot (x \times u) \wedge ds \quad (1.2)$$

の形で与えられた。ここで  $ds$  は楕円体の面素片,  $V$  は楕円体の体積  $\frac{4\pi}{3} (a_1 a_2 a_3)$ ,  $\wedge$  は

$$\wedge \equiv \left( \frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} \right)^{-1/2} \quad \text{で} \quad \int \wedge ds = V \quad (1.3)$$

を与える。また  $-\mu K$  と  $-\mu Q$  はそれぞれ楕円体が単位速度, 単位角速度で並進, 回転を行うとき, 流体が楕円体にお

よぼす力と原点まわりのトルクを与えるテンソル係数である。  
また Brenner<sup>3)</sup>は (1.2) を  $u$  の原点での高階微係数をもついた無限級数の形で与えている。

ここでは特に、回転楕円体に限れば (1.2) が楕円体の軸上での与えられた外場の荷、平均で与えられることを示す。導出には、回転楕円体に対して拡張された平均値の定理を適用する。(附録参照)

## 第2節 回転楕円体のばあい

回転楕円体の軸を  $z$  軸にえらび  $a_1 = a_2 = a$ ,  $a_3 = c$  とおく。このとき次の補助定理を用いると便利である。

Lemma:  $\Phi$  が回転楕円体の内部で一価正則の重調和関数で  $\Delta^2 \Phi = 0$  であれば

$$\frac{1}{3V} \int \Phi \wedge dS = \langle \Phi + \frac{a^2}{4\varepsilon^2} (\varepsilon^2 - z^2) \Delta \Phi \rangle, \quad (2.1)$$

ただし  $\varepsilon^2 = c^2 - a^2$ ,  $\langle f \rangle$  は対称軸上での平均で、楕円体の中心を原点として

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(0, 0, z) dz \quad (2.2)$$

を表わす。(附録参照)。

ストークスの方程式

$$\operatorname{div} u = 0, \quad \Delta u = \operatorname{grad} p (= g) \quad (2.3)$$

は  $p$  が調和関数で  $\Delta p = 0$  を、 $u$  が重調和関数で  $\Delta^2 u = 0$  であることを示す。従って (2.1) を通用すれば (1.2) は  $K$  が定数であることからただちに

$$F = \mu K \cdot \langle w \rangle, \quad (2.4)$$

ただし

$$\langle w \rangle = u + \frac{a^2}{4\varepsilon^2} (\varepsilon^2 - z^2) g \quad (2.5)$$

を与える。

次に (1.2) の第2式の  $X \times u$  については

$$\Delta (X \times u) = X \times \Delta u + 2 \operatorname{rot} u = X \times g + 2\omega \quad (2.6)$$

が成り立つので、 $X \times u$  が重調和関数であることは

$$\Delta (X \times g) = X \times \Delta g + 2 \operatorname{rot} g, \quad (2.7)$$

より

$$\Delta g = 0 \quad (2.8)$$

から明らかである。従って (2.1) で重として  $X \times u$  をとれば

$$T = 3\mu Q \cdot \langle e \times z w + \frac{a^2}{2\varepsilon^2} (\varepsilon^2 - z^2) \omega \rangle, \quad (2.9)$$

ただし、 $e = e^{(3)}$  は  $z$  軸に平行な単位ベクトルである。(2.4),

(2.9) 式が所望の公式である。

特に球については  $z = \varepsilon \xi$  とおき  $\varepsilon \rightarrow 0$  とおけば (1.1) が得られる。また円板については  $c = 0$ 、従って  $\varepsilon = ia$  とすればよく、Oberbeck<sup>1)</sup> と Edward<sup>2)</sup> の値  $K_{11} = K_{22} = 32/3$ ,  $K_{33} = 16$ ,  $Q_{11} = Q_{22} = 2Q_3 = 32/3$  を用いることができる。ストークスレットによる場については金<sup>3)</sup> (軸対称のとき)、宮崎<sup>4)</sup> の結果と一致することが確かめられる。

### 〔附録〕

拡張された平均値の定理： 回転楕円体内で正則な任意の関数  $f(x, y, z)$  について、その表面積分は第2節の記法の下に

$$\frac{1}{3V} \int f \wedge dS = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left( \frac{Q^2}{\varepsilon^2} \right)^n \langle (\varepsilon^2 - z^2)^n \Delta^n f \rangle$$

で与えられる。

## 第2章 ストークスレットと円板<sup>7)</sup>

### 第1節

粘性流体中の二物体間の相互作用は、生物学的にも工学的にも重要な応用を持つ興味深い問題である。

これまでの研究のほとんどは、二物体を点源力に置き換える近似のもとに展開されてきた。唯一の例外は、Stimson & Jeffery<sup>10)</sup>によって与えられた二球を過ぎる軸対称流に対する厳密解や Oseen によるストークスレットと球のばあいである。ここでは、有限の大きさを持つ円板と微小球との相互作用を調べる。問題は、円板面における混合境界値問題として定式化され、微小球の運動は点源力によって近似される。解析にあたって、円板縁での速度の有限性に留意する必要が生じる。

最近、エッジ状の境界付近での微小粒子の運動に関して、いくつかの研究がなされている。Davis et al<sup>11)</sup>は、微小粒子が無限平板に明けられた円孔を対称軸に沿って通る場合の Stokes 流れを調べた。彼らの求めた流速場は円孔縁で発散しており、Hasimoto の結果<sup>12)</sup>と明らかに異なることが指摘されたので、corrigendum の形で修正が行われた<sup>13)</sup>。Miyazaki & Hasimoto<sup>14)</sup>は、微小粒子が対称軸からはなれて、平板に垂直に並進する場合の流れを、Laplace の方程式に対する Green 関数と、エッジでの流速発散を抑える補正項 (Fourier 級数)

を用いて表わした。また、Hasimoto, Kim, Miyazaki<sup>14)</sup>は、半無限平板のエッジ近傍で微小粒子が任意の方向に運動する場合の流れを、Green関数、Neumann関数とエッジ関数(エッジでの発散を取り除く)を用いて閉じた形に与えた。さらに、Miyazaki & Hasimoto<sup>15)</sup>は円孔近傍で微小粒子が任意の方向に並進運動する場合の解を閉じた形に求めた。

円板に関しては、Kim<sup>9)</sup>が微小粒子の軸対称な運動を、双対的積分方程式(dual integral equation)をもとに解析している。また、Dagan et al<sup>17)</sup>は有限球と有限円板の相互作用を、collocation法を用いて、数値的に調べている。

ここでは、有限円板近傍の任意の位置における、任意の方向の微小球の運動を、Miyazaki & Hasimoto<sup>16)</sup>の手法に沿って解析する。第2節に基礎方程式を、第3節に解法と厳密解を与える。この解に基づいて第4節では微小球に働く力、トルクを、第5節では円板に働く力、トルクを計算する。

## 第2節 基礎方程式

粘性流体中に固定された有限円板の近傍を微小球が並進運動する場合に生じる流れを考える。図1のように円板の中心を原点とし、円板面内に $x$ 軸、 $y$ 軸を、円板に垂直に $z$ 軸を取る。軸方向の単位ベクトルを $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ とする。また、円

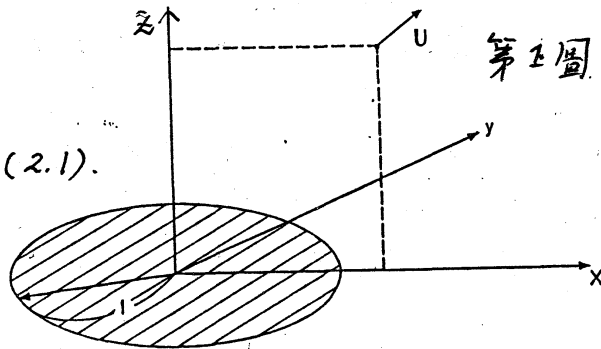


筒座標系  $(\rho, \theta, z)$  を.

$$x = \rho \cos \theta, \quad (2.1).$$

$$y = \rho \sin \theta$$

のように導入する.



微小球は  $(x_0, 0, z_0)$  にあり、速度  $\mathbf{V} = (v_x, v_y, v_z)$  で並進運動する。球半径 " $a$ " は、円板半径 " $1$ " (長さの基準) および円板から球までの距離に比べ充分小さく、速さ  $|\mathbf{V}|$  も充分小さいものと仮定すると、流れは連続式 (2.2) と Stokes の運動方程式 (2.3) に従う.

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{grad} p = \mu \Delta \mathbf{V}. \quad (2.3)$$

ここで  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  は流速ベクトルを、 $p$  は圧力、 $\mu$  は粘性係数を表す。境界条件としては、無限遠での静止条件、

$$(\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty \text{ で } \mathbf{V} \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

円板面での粘着条件、

$$z = 0, \quad \rho < 1 \text{ で } \mathbf{V} = 0, \quad (2.5)$$

円板縁における流速の有限性、

$$[(\rho-1)^2 + z^2]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ で } |\mathbf{V}| < \infty \quad (2.6)$$

が課される。さらに、微小球の運動を Stokeslet の特異性に置き換える。(point force approximation)

$$V \sim V^* = -\frac{3}{4}a \nabla_i \left[ \mathcal{O}_i \left[ \frac{1}{R} \right] - x_{i0} \text{grad} \left( \frac{1}{R} \right) \right], \quad (2.7)$$

$$p \sim p^* = -\frac{3\mu}{2}a \nabla_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{R} \right), \quad (2.8)$$

$$R = [(x-x_0)^2 + y^2 + (z-z_0)^2]^{1/2}. \quad (2.9)$$

ここで、 $\mathcal{O}_j$  は調和関数  $\phi$  に演算して Stokes 方程式の解を作る  
<sup>(18)</sup> 作る演算子である。

$$\mathcal{O}_j[\phi] = x_j \text{grad} \phi - \phi \hat{x}_j, \quad (2.10)$$

$$\Delta \phi = 0. \quad (2.11)$$

また  $j = 1, 2, 3$  は  $x, y, z$  に対応し、重複する添字については  
 アインシュタインの規約に従う。

第3節でこの問題に対する解を閉じた形に求める。

### 第3節 解

問題が線型であるので、球の運動を各成分ごとに分けて考  
 える。

$$V = -\frac{3}{4}a \nabla_i V_s^{(i)}, \quad (3.1)$$

$$p = -\frac{3}{4}a \nabla_i p_s^{(i)}. \quad (3.2)$$

$V_s^{(i)}, p_s^{(i)}$  は軸方向を向いた単位強さの Stokeslet によって誘起さ  
 れる流速場、圧力場を表わす。

<sup>(18)</sup> Stokes 方程式の一般解は4つの調和関数を用いて表わせ  
 る。

$$V = \nabla_j [\phi_j] + \text{grad} \chi, \quad (3.3)$$

$$p = 2\mu \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j}. \quad (3.4)$$

調和関数  $\phi_j$ ,  $\chi$  は境界条件によって決定される。この問題では、調和関数として Green 関数  $G$  を導入すると容易に境界条件を満足させることができる。

$$\Delta G = 0, \quad (3.5)$$

$$z=0, \quad p < 1 \quad \text{if} \quad G = 0, \quad (3.6)$$

$$R \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad G \sim 1/R. \quad (3.7)$$

境界形状を表わすのに都合のよいトロイダル座標系で Green 関数  $G$  を書き下す。<sup>20, 21)</sup>

$$G = w - w^*, \quad (3.8)$$

$$w = \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{\cos \frac{\eta - \eta_0}{2}}{\cosh \frac{w}{2}} \right) \right], \quad (3.9)$$

$$R = [(\chi - \chi_0)^2 + \eta^2 + (z - z_0)^2]^{1/2} \\ = [2 \cosh w - 2 \cos(\eta - \eta_0)]^{1/2} / (M_0 M), \quad (3.10)$$

$$M = M(\xi, \eta) = (\cosh \xi - \cos \eta)^{1/2}, \quad (3.11)$$

$$M_0 = M(\xi_0, \eta_0), \quad (3.12)$$

$$\cosh w = \cosh \xi_0 \cosh \xi - \sinh \xi_0 \sinh \xi \cos \theta, \quad (3.13)$$

$$w^*(\xi, \theta, \eta; \xi_0, \eta_0) = w(\xi, \theta, \eta; \xi_0, 2\pi - \eta_0), \quad (3.14)$$

ただしトロイダル座標系  $(\xi, \theta, \eta)$  は、

$$\rho = \sinh \xi / M^2, \quad 0 < \xi < \infty, \quad (3.16)$$

$$z = \sin \eta / M^2, \quad -\pi < \eta < \pi \quad (3.17)$$

であり、円板面は  $\eta = \pm \pi$  で与えられ、 $\xi \rightarrow \infty$  が円板縁に対応する。また微小球の位置は  $(\xi_0, 0, \eta_0)$  となる。

この  $G$  を用いて、

$$V_s^{(i)} = O_j [G] - x_{j0} \text{grad } G + O_3 [\bar{\Phi}^{(i)}], \quad (3.18)$$

$$p_s^{(i)} = 2\mu (\partial G / \partial x_j + \partial \bar{\Phi}^{(i)} / \partial z) \quad (3.19)$$

$$\bar{\Phi}^{(i)} = (x_j - x_{j0}) \partial G / \partial z - z \partial G / \partial x_j - z_0 \partial G / \partial x_{j0} \quad (3.20)$$

(6.19)

を考えると、

- (i)  $G$  は微小球近傍で  $1/\xi$  に漸近するので、(3.18) の第一項と第二項が *Stokeslet* の特異性を与える。
- (ii) 円板面上では、 $G = 0$  であるため、流速の  $x$  成分、 $y$  成分が消える。また  $z$  成分も第一項、第二項、第三項で打ち消し合う。
- (iii) (3.20) の  $\bar{\Phi}^{(i)}$  は  $(x_0, 0, z_0)$  で正則な調和関数であり、流速は無限遠で  $O(1/r)$  となる。

等の境界条件を満足することがわかる。

ところが、(3.18) で与えられる流速の  $\rho, z$  成分は円板縁で  $O(e^{3/2})$  となり、また (3.19) の圧力も  $O(e^{3/2})$  と積分不能となる。これは  $G$  が円板縁付近で、

$$G \sim \frac{2}{\pi} M_0 \cos \frac{\eta_0}{2} \frac{1}{M} \psi(0) \cos \frac{\eta}{2} = G \frac{1}{M} \psi(0) \cos \frac{\eta}{2}, \quad (3.21)$$

$$\psi(0) = \frac{1}{\cosh \xi_0 - \sinh \xi_0 \cos \theta} \quad (3.22)$$

と  $O(e^{-2\xi})$  であり、 $G$  の一階微分が  $O(e^{\xi/2})$ 、二階微分が  $O(e^{3\xi/2})$  を与えるからである。具体的な発散の形は、(3.21), (3.22) を (3.18) に代入して、

$$V_s^{(1)} \sim -\alpha_0 \underline{g} + \operatorname{Re} \underline{g}^*, \quad (3.23)$$

$$V_s^{(2)} \sim \operatorname{Im} \underline{g}^*, \quad (3.24)$$

$$V_s^{(3)} \sim -2\alpha_0 \underline{g}, \quad (3.25)$$

$r = \tilde{r}$  し

$$\begin{aligned} \underline{g} &= \frac{1}{2} \mathcal{O}_3 [M_s \psi] + \operatorname{grad} \left[ \frac{M_c}{M^2} \psi \right] \\ &\doteq -\frac{1}{3} \mathcal{O}_p [M_c \psi] + \frac{1}{6} \mathcal{O}_3 [M_s \psi] + \frac{1}{3} \operatorname{grad} [M_c \psi], \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$M_s / \sin \frac{\eta}{2} = M_c / \cos \frac{\eta}{2} = M, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{O}_p [\phi] = r \operatorname{grad} \phi - \phi \hat{r} \quad (3.28)$$

となる。ここで " $\doteq$ " は  $O(1)$  を無視したことを示す。また、

$\underline{g}^*$  は  $\underline{g}$  の  $\psi$  を  $\psi e^{i\theta}$  で置き換えたものである。

これらの発散を抑えるためにエッチ関数を導入する。エッチ関数は Stokes 方程式の解であり、円板面上での粘着条件無限遠での静止条件を満足し、また円板縁における上記の特異性、(符号は逆) 以外には特異性を持たないものである。

エッチ関数を Stokes 方程式の一般解の形 (3.3) に求めて  $\psi$

<:

$$V_e^{(1)} = x_0 g - \operatorname{Re} g^*, \quad (3.29)$$

$$V_e^{(2)} = -\operatorname{Im} g^*, \quad (3.30)$$

$$V_e^{(3)} = z_0 g, \quad (3.31)$$

に  $\bar{z}$  として

$$\begin{aligned} g &= O_r[\phi_j] + \operatorname{grad} \chi \\ &= O_r[\phi_r] + 2\phi_\theta \hat{\theta} + O_s[\phi_j] + \operatorname{grad} \chi, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\phi_r = \phi_1 \cos \theta + \phi_2 \sin \theta, \quad (3.33)$$

$$\phi_\theta = \phi_1 \sin \theta - \phi_2 \cos \theta, \quad (3.34)$$

$g^*$  は  $g$  の  $\phi_j, \chi$  を  $\phi_j^*, \chi^*$  で置き換えたものとする。一般に円板縁で  $O(e^{1/2})$  であるような調和関数  $f, g$  の2つの任意関数  $f, g$  を用いて表わせることを使って  $\phi_j, \phi_j^*, \chi, \chi^*$  を求める。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \left\{ \begin{matrix} M_s \\ M_c \end{matrix} \right\} \phi, \\ \phi &= f(\tau e^{i\theta}) + g(\tau e^{-i\theta}), \\ \tau &= \tanh \xi. \end{aligned} \quad (3.35)$$

まず、(3.22) の  $\psi$  と  $\psi e^{i\theta}$  を書き換える。

$$\psi = 1 + \tau_0 [f(e^{i\theta}) + f(e^{-i\theta})], \quad (3.36)$$

$$\psi^* = \tau_0 + f(e^{i\theta}) + \tau_0^2 f(e^{-i\theta}), \quad (3.37)$$

ただし、

$$f(x) = \frac{x}{1 - \tau_0 x}, \quad \tau_0 = \tanh \frac{\xi_0}{2}, \quad (3.38)$$

これらの形を意識しながら、 $\phi_j, \chi, \phi_j^*, \chi^*$  を決定する。

$$\phi_r = -M_c \left[ \frac{\tau}{4} + \frac{\tau_0}{3} \left( \tau + \frac{1}{\tau} \right) \operatorname{Re} [f(\tau e^{i\theta})] \right], \quad (3.39)$$

$$\phi_\theta = M_c \left[ \frac{\tau_0}{3} \left( \tau - \frac{1}{\tau} \right) \operatorname{Im} [f(\tau e^{i\theta})] \right], \quad (3.40)$$

$$\phi_s = M_s \left[ \frac{1}{4} + \frac{\tau_0}{3} \operatorname{Re} [f(\tau e^{i\theta})] \right], \quad (3.41)$$

$$\chi = M_c \left[ \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \tau_0 \operatorname{Re} [f(\tau e^{i\theta})] \right], \quad (3.42)$$

$$\phi_r^* = -M_c \left[ \frac{1}{4} \tau_0 \tau + \frac{1}{6} \left( \tau + \frac{1}{\tau} \right) [f(\tau e^{i\theta}) + \tau_0^2 f(\tau e^{-i\theta})] \right], \quad (3.43)$$

$$\phi_\theta^* = M_c \left[ \frac{i}{6} \left( \tau - \frac{1}{\tau} \right) [f(\tau e^{i\theta}) - \tau_0^2 f(\tau e^{-i\theta})] \right], \quad (3.44)$$

$$\phi_s^* = M_s \left[ \frac{\tau_0}{4} + \frac{1}{6} [f(\tau e^{i\theta}) + \tau_0^2 f(\tau e^{-i\theta})] \right], \quad (3.45)$$

$$\chi^* = M_c \left[ \frac{\tau_0}{4} + \frac{1}{3} [f(\tau e^{i\theta}) + \tau_0^2 f(\tau e^{-i\theta})] \right]. \quad (3.46)$$

$\xi$ ,  $\xi^*$  が円板面上で粘着条件を、無限遠で静止条件を満足することは容易に確認される。また、 $\xi \rightarrow \infty$  で  $\tau \rightarrow 1$  であることを思えば、 $\xi$ ,  $\xi^*$  の特異性が、(3.26), (3.36), (3.37) で与えられる  $\xi$ ,  $\xi^*$  のそれと同じものであることがわかる。(ただし、 $-\frac{M_c \tau}{4}$ ,  $\frac{M_s}{4}$ ,  $\frac{M_c}{4}$  に比例する項は軸対称な発散を表わし、直接、比べるわけにはいかないが、簡単な計算で確認される。)

以上をまとめると、

$$V_s^{(i)} = \mathcal{O}_i[G] - \chi_{i0} \operatorname{grad} G + \mathcal{O}_3[\bar{\Xi}^{(i)}] + C_g V_e^{(i)} \quad (3.47)$$

$$p_s^{(i)} = 2\mu (\partial G / \partial \chi_i + \partial \bar{\Xi}^{(i)} / \partial z) + C_g p_e^{(i)}, \quad (3.48)$$

ここで

$$p_e^{(i)} = \chi_0 \pi - \operatorname{Re} \pi^* \quad (3.49)$$

$$p_e^{(2)} = -I_m \pi^* \quad (3.50)$$

$$p_e^{(3)} = \varepsilon_0 \pi \quad (3.51)$$

ただし

$$\pi = 2\mu \partial \phi_i / \partial x_j \quad (3.52)$$

$$\pi^* = 2\mu \partial \phi_i^* / \partial x_j \quad (3.53)$$

が求める解を与える。

#### 第4節 微小球に働く力, トルク

一般化された Faxén の法則<sup>(4,5)</sup>に基づいて、微小球に働く力、トルクを壁効果の最低次まで評価すると、

$$\mathbf{F} = -6\pi\mu a \nabla_j \hat{x}_j + 6\pi\mu a \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}^* \rangle_0 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T} = -8\pi\mu a^3 \Omega_j \hat{x}_j + 4\pi\mu a^3 \langle \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^* \rangle_0 \quad (4.2)$$

となる。ここで  $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}^* = \text{rot } \mathbf{v}^*$  であり、また  $\langle \quad \rangle_0$  は球中心での値を取ることを示す。前節の結果を代入して、整理すると

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{T} = \mu \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (4.4)$$

ただし、 $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  は  $3 \times 3$  の行列で、球半径に関する展開の形に与えられる。

$$\mathbf{K} = -6\pi\mu a \mathbf{I} + 6\pi a^2 \begin{bmatrix} f_{xx}, & 0, & f_{xz} \\ 0, & f_{yy}, & 0 \\ f_{zx}, & 0, & f_{zz} \end{bmatrix} + \dots \quad (4.5)$$



$$C = 8\pi a^3 \begin{bmatrix} 0, t_{xy}, 0 \\ t_{yx}, 0, t_{yz} \\ 0, t_{zy}, 0 \end{bmatrix} + \dots \quad (4.6)$$

ここで  $\mathbf{I}$  は  $3 \times 3$  の単位行列であり,  $f_{ij}, t_{ij}$  は微小球位置の関数となる。

$$f_{xx} = -\frac{9M_0^2}{16\pi} \left[ \frac{\eta_0}{\sin\eta_0} + \frac{2}{3}(1+\cos\eta_0) \right] + \frac{3}{4\pi} \frac{(1-\operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta_0)(1+\cos\eta_0)}{\operatorname{ch}\xi_0 + 1} \\ - \frac{1}{16\pi} \frac{(1-\operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta_0)^2}{M_0^2(\operatorname{ch}\xi_0 + 1)} [-\operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta_0 + 8\operatorname{ch}\xi_0 - 9\cos\eta_0], \quad (4.7)$$

$$f_{yy} = -\frac{M_0^2}{16\pi} \left[ \frac{9\eta_0}{\sin\eta_0} + 8 - \cos\eta_0 - \frac{8(1+\cos\eta_0)}{\operatorname{ch}\xi_0 + 1} \right], \quad (4.8)$$

$$f_{zz} = -\frac{3M_0^2}{8\pi} \left[ \frac{3\eta_0}{\sin\eta_0} - 1 \right] + \frac{9}{8\pi} \sin^2\eta_0 \left[ 1 + \frac{(\operatorname{ch}\xi_0 - 1)}{18M_0^2} (9\operatorname{ch}\xi_0 \cos\eta_0 + \cos\eta_0 - 1) \right], \quad (4.9)$$

$$f_{xz} = f_{zx} = -\frac{\operatorname{sh}\xi_0 \sin\eta_0 (1+\cos\eta_0)}{16\pi M_0^2 (\operatorname{ch}\xi_0 + 1)} [\operatorname{ch}^2\xi_0 (9-\cos\eta_0) + \operatorname{ch}\xi_0 (7-9\cos\eta_0) - 6\cos\eta_0], \quad (4.10)$$

$$t_{xy} = -\frac{1}{16\pi} M_0^2 (\operatorname{ch}\xi_0 + 3) \sin\eta_0, \quad (4.11)$$

$$t_{yx} = \frac{1}{16\pi} \operatorname{ch}\xi_0 \sin\eta_0 [\operatorname{ch}\xi_0 (3-\cos\eta_0) - 3\cos\eta_0 + 1], \quad (4.12)$$

$$t_{yz} = -\frac{1}{16\pi} \operatorname{sh}\xi_0 (1+\cos\eta_0) [\operatorname{ch}\xi_0 (4-\cos\eta_0) - 3\cos\eta_0], \quad (4.13)$$

$$t_{zy} = \frac{1}{16\pi} M_0^2 \operatorname{sh}\xi_0 (1+\cos\eta_0) \left[ 1 + \frac{2}{\operatorname{ch}\xi_0 + 1} \right]. \quad (4.14)$$

行列  $K$  は, Lorentz の相反定理から対称行列となることが知られている。<sup>4)</sup> その対角成分  $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}$  は抵抗に対する補正項で、 $x_0 - z_0$  面内 ( $\xi_0 - \eta_0$  面内) 全体で負となる。非対角成分  $f_{xz} = f_{zx}$  は揚力の存在を示す。球 ( $z_0 > 0$ ) が半径方向に対称軸から遠ざかるように動くときには、 $z$  方向負の力

が、正の  $z$  方向に動くときには、対称軸向きに半径方向の力が働くことになる。図2、図3に、 $-f_{xx}$ ,  $-f_{xz} = -f_{zx}$  の  $x_0 - z_0$  面内での等値線を示す。特に、微小球が対称軸 ( $z$  軸) 上に位置する場合には、

$$f_{xx} = f_{yy} = -\frac{1}{16\pi} \left[ \frac{9}{z_0} (\pi - 2 \tan^{-1} z_0) - \frac{2}{z_0^2 + 1} + \frac{2z_0}{(z_0^2 + 1)^2} \right], \quad (4.15)$$

$$f_{zz} = -\frac{3}{8\pi} \left[ \frac{3}{z_0} (\pi - 2 \tan^{-1} z_0) + \frac{10}{z_0^2 + 1} - \frac{4}{(z_0^2 + 1)^2} \right], \quad (4.16)$$

となり、 $f_{zz}$  は軸対称な問題を扱った Kim の結果<sup>9)</sup>と一致する。また、対称性からも明らかなように  $f_{xz} = f_{zx} = 0$  となる。円板面近傍 ( $z_0 \rightarrow \pm\pi$ ) では、

$$f_{xx} = f_{yy} \sim \frac{9}{16} \frac{1}{z_0}, \quad (4.17)$$

$$f_{zz} \sim \frac{9}{8z_0} \quad (4.18)$$

であり、微小球が無限平板の近くを運動する場合の結果<sup>4)</sup>と一致する。円板縁の近傍 ( $z_0 \rightarrow \infty$ ) では、すべての成分が半無限平板の場合の結果に漸近する。

行列  $C$  は球に働くトルクを示し、球が回転運動することになる。図4、 $-txy$  の  $x_0 - z_0$  面内での等値線を示す。( $tyx$  は  $txy$  と、 $tyz$  は  $tzy$  とほぼ同じような変動を示す。) 球が半径方向正に並進するときには、正の動径方向成分のトルク ( $tyx$ ) が、動径方向正に動く場合には、負の半径方向成分のトルク ( $txy$ ) が生じる。また、正の  $z$  方向に

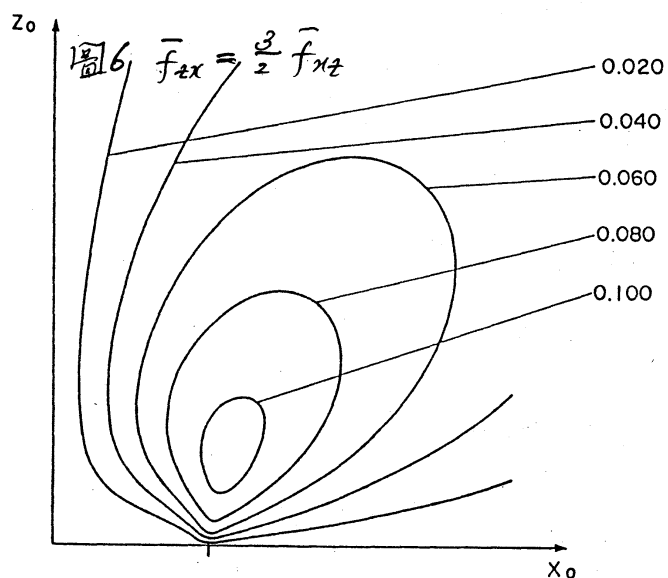
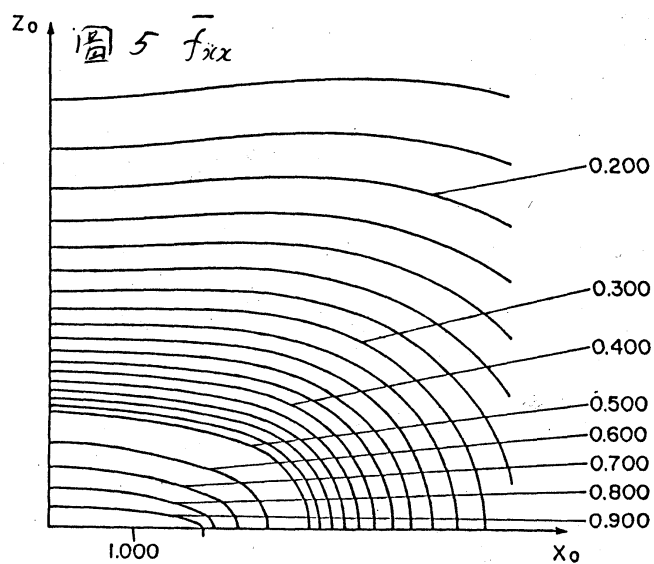
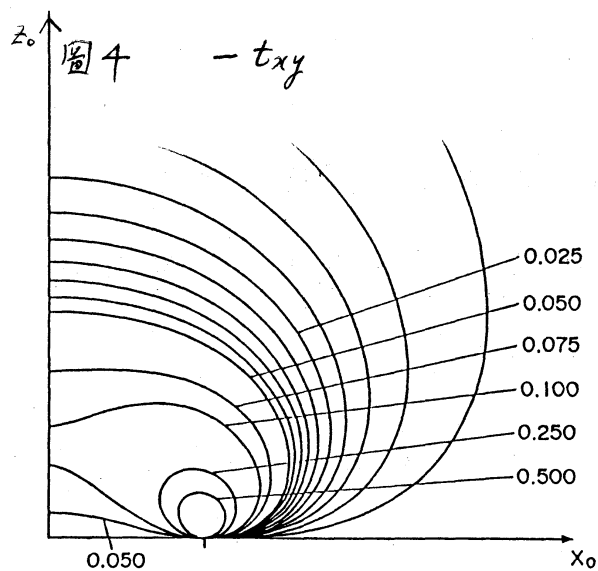
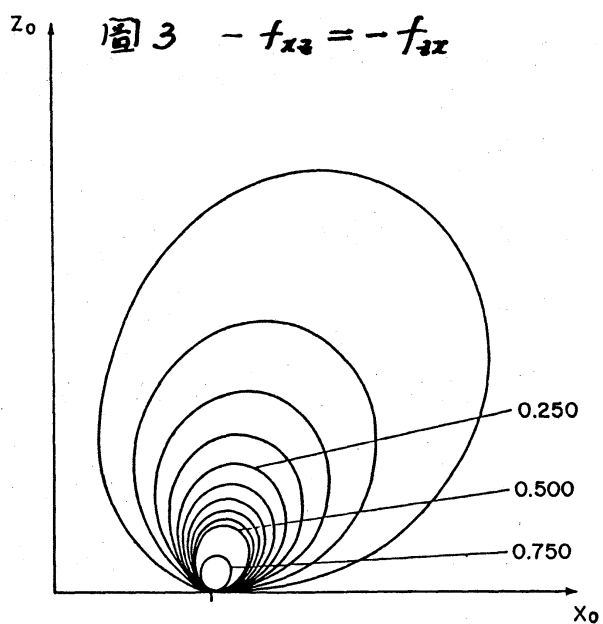
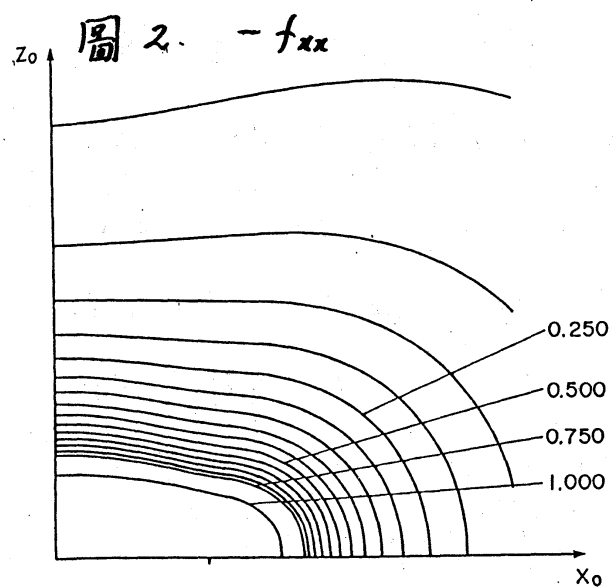


圖 7, 8 17 最後尾.

運動する球には、負の動径方向のトルク ( $t_{yz}$ ) が、正の動径方向に動く球には、正の  $z$  方向のトルク ( $t_{zy}$ ) が働く。対称性から  $z$  軸上では、 $t_{xy} + t_{yz} = 0$ ,  $t_{yz} = t_{zy} = 0$  となりまた  $z = 0$  の面上 ( $x_0 > 1$ ) では  $t_{xy} = t_{yx} = 0$  となる。円板面近傍ですべての成分がゼロとなるのは、無限平板の存在のもとに並進する球に働くトルクが  $O(a^6)$  となる<sup>(4)</sup>ためである。円板縁近傍では、半無限半板での結果<sup>(14)</sup>に漸近する。

## 第5節

Stokes 流れの無限遠における漸近形から、円板に働く力、トルクを計算することができる。<sup>(18)(19)</sup> 第3節での流れが、微小球の運動による特異性を分離して、 $z \rightarrow \infty$  ?

$$V - V^* \sim O_j [A_j + A_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} + \dots] \frac{1}{2} + \text{grad} [B + \dots] \frac{1}{2} \quad (5.1)$$

と展開されるとすると、円板に働く力、トルクは、

$$\bar{F}_j = 8\pi\mu A_j, \quad (5.2)$$

$$\bar{T}_j = 8\pi\mu \varepsilon_{jkl} A_{kl} \quad (5.3)$$

と与えられる。式(3.1)と無限遠  $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$  で展開して、 $A_j$ ,  $A_{kl}$  を決定する。結果を整理すると、

となる。ここで  $K_{ds}$ ,  $C_{ds}$  は  $3 \times 3$  の行列であり、各成分は球位置の関数として与えられる。

$$K_{ds} = 6\pi a \begin{bmatrix} \bar{f}_{xx}, 0, \bar{f}_{xz} \\ 0, \bar{f}_{yy}, 0 \\ \bar{f}_{zx}, 0, \bar{f}_{zz} \end{bmatrix} + \dots, \quad (5.6)$$

$$C_{ds} = 6\pi a \begin{bmatrix} 0, \bar{t}_{xy}, 0 \\ \bar{t}_{yx}, 0, \bar{t}_{yz} \\ 0, \bar{t}_{zy}, 0 \end{bmatrix} + \dots, \quad (5.7)$$

ここで、

$$\bar{f}_{xx} = \textcircled{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \frac{M_{co}}{M_o^2} \frac{(1 - \text{ch} \frac{\gamma_o}{2} \cos \gamma_o)}{(1 + \text{ch} \frac{\gamma_o}{2})}, \quad (5.8)$$

$$\bar{f}_{yy} = \textcircled{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \frac{M_{co}}{1 + \text{ch} \frac{\gamma_o}{2}}, \quad (5.9)$$

$$\bar{f}_{zz} = \textcircled{4} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{M_{co}(1 - \cos \gamma_o)}{M_o^2}, \quad (5.10)$$

$$\bar{f}_{zx} = \frac{3}{2} \bar{f}_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{T_o M_{co} (1 + \cos \gamma_o)}{M_o^2}, \quad (5.11)$$

$$\bar{t}_{xy} = -\frac{\sin \gamma_o}{M_o^2} \textcircled{4} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{M_{co} (1 + \cos \gamma_o)}{M_o^2 (1 + \text{ch} \frac{\gamma_o}{2})}, \quad (5.12)$$

$$\bar{t}_{yx} = \frac{\sin \gamma_o}{M_o^2} \textcircled{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{M_{co} \text{ch} \frac{\gamma_o}{2} (1 + \cos \gamma_o)}{M_o^2 (1 + \text{ch} \frac{\gamma_o}{2})}, \quad (5.13)$$

$$\bar{t}_{yz} = -\frac{\text{sh} \frac{\gamma_o}{2}}{M_o^2} \textcircled{4} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{T_o M_{co}}{M_o^2} \cos \gamma_o, \quad (5.14)$$

$$\bar{t}_{zy} = \frac{\text{sh} \frac{\gamma_o}{2}}{M_o^2} \textcircled{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{T_o M_{co}}{M_o^2}, \quad (5.15)$$

ただし

$$\textcircled{4} = 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{\cos \frac{\gamma_o}{2}}{\text{ch} \frac{\gamma_o}{2}} \right) \quad (5.16)$$

図5に  $\bar{f}_{xx}$  の、図6に  $\bar{f}_{zx} = \frac{3}{2} \bar{f}_{xz}$  の等値線を示す。円板面上で  $\bar{f}_{xx} = \bar{f}_{yy} = \bar{f}_{zz} = 1$  となるのは、微小球の運動に対する

駆動力がそのまま円板に伝えられたことを示す。 $\bar{f}_{zx}$  は球( $z_0 > 0$ )が半径方向正に運動するときに、円板を $z$ 方向正に引き上げる力で、その最大値0.15が円板縁からはなれた(1.15, 0.67)で与えられることは興味深い。図7に $\bar{t}_{yx}$ の、図8に $\bar{t}_{zy}$ の等値線を示す。円板面上で $\bar{t}_{zy} = -\bar{t}_{yz} = x_0$ となることは、上記の $\bar{f}_{xx}$ ,  $\bar{f}_{yy}$ ,  $\bar{f}_{zz}$ に対する事実に対応する。図で $\bar{t}_{yz}$ が球の位置によつて符号を変えることが注目になる。

式(5.8) ~ (5.16)は、第一章での拡張された Faxén の法則に基づいて得ることもできる。円板の場合には、

$$\bar{F} = \mu K \cdot \langle w \rangle, \quad (5.17)$$

$$T = \mu Q \cdot \left\langle \hat{z} \times z w + \frac{1+z^2}{2} \omega \right\rangle, \quad (5.18)$$

$$w = v + \frac{1}{4}(1+z^2)\Delta v, \quad (5.19)$$

$$\omega = \text{rot } v, \quad (5.20)$$

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2i} \int_{-i}^i \dots dz \quad (5.21)$$

であり、

$$K = \frac{16}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{16}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

である。 $v$ として、Stokeslet による流れを代入して、

$$v = v^f$$

初等積分を実行すれば、再び式(5.8) ~ (5.16)が得られる。

## References

- 1) A. Oberbeck : J. reine angew. Math. 81 (1876) 62.
- 2) D. Edwards : Quart. J. Math. 26 (1892) 70.
- 3) H. Brenner : Chem. Engg. Sci. 19 (1964) 703.
- 4) J. Happel and H. Brenner : Low Reynolds Number Hydrodynamics (Prentice-Hall, 1965) Chapter 5.
- 5) H. Faxén : Arkiv Mat. Astro. Phys. 18 (1924) (29) 3.
- 6) H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 3294.
- 7) T. Miyazaki : J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984).
- 8) J. Pérès : Comptes rendus 188 (1929) 310.
- 9) M.-U. Kim : J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 449.
- 10) M. Stimson and O. Jeffery : Proc. Roy. Soc. Lond. A 182 (1926) 449.
- 11) A. Davis et al. : J. Fluid Mech. 103 (1981) 183.
- 12) H. Hasimoto : 流体力学における混合境界値問題  
数理研講究録 360 (1979), J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981)  
4068.
- 13) A. Davis et al. : J. Fluid Mech. 111 (1981) corrigendum 499.
- 14) T. Miyazaki and H. Hasimoto : J. Phys. Soc. Jpn. 51 (1982)  
2343.
- 15) H. Hasimoto, U. Kim and T. Miyazaki : J. Phys. Soc. Jpn.  
52 (1983) 1996.
- 16) T. Miyazaki and H. Hasimoto : Submitted to J. Fluid Mech.
- 17) Z. Dagan et al. : J. Fluid Mech. 122 (1982) 273.
- 18) I. Imai : Ryutai Rikigaku (Fluid Mechanics) (Syokabo, Tokyo,  
1973) p.428 [in Japanese].

- 19) H. Hasimoto and O. Sano : Ann. Rev. Fluid Mech. 335 (1980) 335.
- 20) H. Batemann : Partial Differential Equations (Cambridge Univ. Press, 1932) 461.
- 21) G. Wendt : Handbuch der Physik ed. S. Flugge (Springer, Berlin, 1958) Vol. 16, p.144.

